Sottospazi di $\mathbb{R}^n$

Esercizio1:
Siano $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_2 = 0$ e $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 = 0$ due sottospazi di $\mathbb{R}^3$.

a) Si ha $\mathbb{R}^3 = U + V$?

b) Determinare una base di $U \cap V$.

Esercizio2:
Se U e V sono due sottospazi di $\mathbb{R}^3$ tali che $\dim U = \dim V = 2$. Si può avere $U \cap V = \{(0, 0, 0)\}$?

Esercizio3:
Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^5$ generato dai vettori $v_1 = (1, -2, 0, 3, -1), v_2 = (2, -3, 2, 5, -3), v_3 = (1, -2, 1, 2, -2)$. Scrivere V come soluzione di un sistema lineare omogeneo.

Esercizio4:
Dati i sottospazi di $\mathbb{R}^4$ $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$ e $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0\}$, determinare una base di $V, U, V + U, V \cap U$.

Esercizio5:
Dati i sottospazi di $\mathbb{R}^5$ $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 | x_1 - x_2 - x_3 = 0, 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0, -6x_1 + x_2 + x_5 = 0$ e $U = \langle (1, 3, 0, 2, 1), (1, 5, -6, 6, 3), (2, 5, 3, 2, 1) \rangle$, determinare una base di $U \cap V$ e completarla ad una base di $\mathbb{R}^5$.

Soluzioni:

1) a) Sì.

2) No. Motivare la risposta!!

3) Verificare che $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base per V. Determinare lo spazio delle equazioni lineari omogenee che hanno come soluzioni v_1, v_2, v_3. Un possibile sistema è $\begin{cases} -5x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0(1) \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 0(2) \end{cases}$ o un qualsiasi altro sistema formato da due equazioni (indipendenti!) che sono combinazione lineare di (1) e (2).